UNE MÉDAILLE DE BRONZE AUX OLYMPIADES INTERNATIONALES DES MATHÉMATIQUES

31 juillet 2018

Table des matières

1. Le nombre des points nécessaires

Au cours des dix dernières années, le seuil pour la médaille de bronze a toujours été entre 14 et 16 points, mais Il est rare que 14 points suffisent. La dernière fois que le seuil avait dépassé 16 était en 1995. Par conséquent, ne serait-ce que du point de vue statistique, avoir 16 points ou plus vous donne de meilleures chances pour décrocher une médaille de bronze. Le reste de cet article aura pour but d'expliquer comment l'on peut 'assurer' 16 points ou plus aux IMOs.

2. Une médaille bronze raisonnable

Il y a plusieurs façons de collecter les points nécessaires pour une médaille de bronze. Voici, par exemple, des résultats de compétiteurs (réels) qui ont obtenu des médailles de bronze :

Team	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Contestant 1 (2018)	7	1	0	7	1	0
Contestant 2 (2018)	0	7	0	7	2	0
Contestant 3 (2011)	7	0	3	1	0	7

Parmi ces trois bronzes, la plus raisonnable est celle du premier contestant. Le deuxième a dû résoudre le P2 au lieu du P1 ; un signe de faiblesse en géométrie. Le troisième a dû résoudre le P6 au lieu du P4, ce qui signifie une faiblesse en combinatoire. Si votre but est une médaille de bronze, il faut savoir qu'il n'est pas raisonnable de s'attendre à résoudre un P2/P5 sans avoir résolu un P1/P4. Aussi, s'attendre à résoudre un P3/P6 au lieu d'un P1/P4 est absurde.

Disons par exemple que votre point fort est la géométrie, et qu'à présent, vous avez suffisamment de confiance en vous-mêmes pour garantir un P1/P4 en géométrie, mais que vous n'avez jamais fait de combinatoire. Dans ce scénario, il est plus facile de commencer à apprendre à résoudre des exercices de combinatoire jusqu'au point de pouvoir résoudre des P1/P4 en combinatoire que de continuer à faire de la géométrie jusqu'à pouvoir résoudre des P2/P5 en géométrie. D'ailleurs, ça vous coûterait aussi moins de temps, et vous finirez par être en meilleure position pour garantir une médaille de bronze.

Règle d'Or : Ne jamais penser a résoudre des P2/P5 ou P3/P6 dans un sujet avant de garantir qu'on peut résoudre les P1/P4 dans tous les autres sujets.

Malheureusement, résoudre le P1 et le P4 d'un IMO ne garantit pas les 16 points dont on avait parlé. Il vous faudra deux points de plus que vous allez devoir collecter des 4 problèmes restants. Collecter ces deux points n'est pas toujours aussi facile que cela puisse paraître. En général, pour avoir des points partiels (1–3), vous devez trouver des résultats qui peuvent aboutir à une solution. Il semblerait plus facile de décrocher des points partiels dans des exercices d'équations fonctionnelles ou de la géométrie par exemple, que cela l'est lorsqu'il s'agit d'exercices sur les inégalités ou bien l'arithmétique. Pour garantir une médaille de bronze, on ne doit pas ressortir aux spéculations de ce sorte ; on doit avoir une stratégie.

En examinant les IMOs depuis l'année 2000 (et même avant), les problèmes P2 et P5 ont toujours été dans des sujets différents. Par exemple, dans les 9 IMOs qui ont eu lieu depuis 2010, on a eu 18 problèmes en P2/P5, 6 parmi ces problèmes étaient en combinatoire, 6 autres en algèbre, 4 en théorie des nombres et 2 en géométrie. Tout ceci était drastiquement différent avant 2010, période durant laquelle la géométrie était beaucoup plus dominante dans les olympiades.

D'après ces statistiques, on peut déduire une stratégie pour garantir les 16 points nécessaires pour obtenir une médaille de bronze : après avoir maîtrisé les quatre sujets des olympiades suffisamment pour résoudre tous les P1/P4 que l'on peut rencontrer, on pourra choisir trois sujets (les statistiques favorisent les combinatoires, l'algèbre, et la théorie des nombres) vers lesquels on dirigera la majorité des efforts de préparation, tout de même sans négliger le quatrième sujet. Finalement, prioriser l'acquisition du niveau P1/P4 dans tous les sujets avant de penser aux P2/P5 vous placera en meilleure position pour vous qualifier dans les olympiades nationales pour faire partie de l'équipe représentant votre pays aux IMOs.

3. Ce que vous devez apprendre et ce que vous devez éviter

Lorsque vous débuterez votre chemin vers les IMOs, l'une des plus grande difficultés à laquelle vous ferez face sera de savoir quoi travailler mais surtout quand le travailler. Il arrive très souvent que l'on s'abstienne de résoudre un problème par peur de ne pas posséder les outils nécessaires pour le résoudre. Pour cette raison, un nombre de compétiteurs passent une bonne partie de leurs préparations cherchant des outils qui leurs permettraient de résoudre des exercices sans efforts. Lorsqu'il s'agit des exercices d'olympiades en général, particulièrement ceux des IMOs, cette mentalité est à éviter. Voici, dans ce qui suit, une description des outils que vous devrez avoir en poche pour approcher confortablement la majorité des problèmes d'olympiades. Ces derniers sont largement suffisants pour décrocher une médaille de bronze.

Tout d'abord, vous aurez besoin d'une bonne fondation des principes de raisonnement mathématique : raisonnement par récurrence, par contraposition, et par l'absurde ; ainsi que savoir faire des manipulations algébriques – et ainsi de suite. Rappelons que les problèmes d'olympiades sont généralement divisés en 4 catégories :

Algèbre, **c**ombinatoire, **g**éométrie, et **t**héorie des **n**ombres.

Voici alors ce dont vous aurez besoin :

- Algèbre : Les propriétés des polynômes à une seule variable (degré, racines, coefficients, factorisation,...) ; familiarité avec la fonction partie entière ; calcul des suites récurrentes de degré 1 et de degré 2 ; familiarité avec les équations fonctionnelles ; quelques inégalités classiques comme Cauchy-Schwarz, Hölder, AM-GM, Schur, et Chebychev (ces deux derniers ne sont pas vraiment nécessaires).
- Combinatoire : argumenter par récurrence ; le principe des tiroirs ; le principe des invariants ; le principe des extremums ; le coloriage ; et le dénombrement.
- Géométrie : familiarité avec les triangles (hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices, cercle inscrit, cercle circonscrit, cercles exinscrits) ; similitudes et congruences ; loi des sinus et loi des cosinus ; formules d'aire ; angles circulaires et leurs propriétés ; puissance d'un point par rapport à un cercle ; le théorème des axes radicaux ; théorèmes de Pythagore, Thalès, Ceva et Ménélaus.
- Théorie des nombres : divisibilité et congruence ; décomposition en nombre premiers ; nombres (somme et produit) des diviseurs d'un entier naturel ; valuations p-adiques ; expressions en binaire (et plus généralement en base b) ; calcul dans $\mathbb{Z}_n$; le théorème des restes chinois ; le petit théorème de Fermat ; le théorème de Wilson ; notions sur les restes quadratiques ; familiarité avec les équations diophantiennes ; notions d'ordre modulo n, fonction ϕ d'Euler, le théorème d'Euler.

Pour des ressources utiles, vous pouvez consulter la page de l'association Animath :

http ://www.animath.fr/spip.php ?article255

Ou encore la page de l'association Math&Maroc :

http ://www.mathemaroc.com/publications.html

Il y a aussi le site web de Yufei Zhao qui contient des articles utiles :

http ://yufeizhao.com/olympiad/

Dans ces sites web, les articles qui vous seront d'intérêt sont :

- L'algèbre : pour les inégalités, vous pouvez lire "Secrets in Inequalities", chapitres 1, 2 et 3 (pas plus, le 3 n'est pas absolument nécessaire). Pour les polynômes, les quatre premiers chapitres du "Cours complet sur les polynômes" d'Animath sont largement suffisants. Quant aux équations fonctionnelles, ce sujet n'a pas de requis techniques. Lisez cette introduction d'Evan Chen pour vous familiariser avec ce type de problèmes et puis faites des exercices pour améliorer votre aptitude : http ://web.evanchen.cc/handouts/FuncEq-Intro/FuncEq-Intro.pdf.
- Pour la combinatoire : le cours "Stratégies de base" de Math&Maroc, puis "Un bref cours sur les stratégies de base" d'Animath. Aussi, l'article intitulé "Combinatorics : pigeon-hole principle, coloring, binomial coefficients, bijections" de Yufei-Zhao.
- Pour la géométrie : Le cours "Polycopie de géométrie pour débutants" d'Animath est un bon point de départ. Après, vous pouvez lire l'article intitulé "L'ancien polycopié de géométrie". Dans ce dernier, le premier chapitre n'est pas extrêmement important et peut être lu après les autres. La partie sur la puissance d'un point par rapport à un cercle peut être supplémentée par l'article "Power of a point" du site web de Yufei Zhao. Si vous êtes capable de vous procurer le livre d'Evan Chen, "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad", sachez que la première partie est très utile.
- Théorie des nombres : le cours d'Animath sur le sujet, nommé "Cours d'arithmétique complet" est de bonne qualité. Mais nous conseillons cependant le livre "104 problems in Number theory" par Titu Andrescu.

D'autres ressources sont disponibles pour vous aidez dans votre préparation :

- artofproblemsolving.com : vous trouverez ici un grand nombre d'olympiades d'autres pays, avec accès aux solutions. Ce site web contient aussi un forum où vous pourrez discuter vos questions avec des membres plus expérimentés. Tout de même, nous vous conseillons de garder l'usage du forum au minimum.
- mathraining.be : un espace de préparation aux olympiades contenant des cours et des exercices d'application : un très bon espace pour commencer.
- imo-official.org : le site web officiel de l'IMO. Vous trouverez ici l'histoire de l'IMO, les anciens tests avec leurs solutions, les résultats de tous les pays, etc.

En tant que débutant, il est impératif d'éviter les sujets avancés qui, généralement parlant, ne sont introduits à la scène olympique que pour trivialiser un petit ensemble d'exercices qui sont autrement difficiles. Pour citer quelques exemples :

- Algèbre : L'inégalité de Muirhead ; la méthode des variables mixes (MVT) ; ainsi que d'autre méthodes de résolutions des inégalités.
- Combinatoire : Méthodes probabilistes ; théorie de Ramsey ; dénombrement algébrique ; complication dans la théorie des graphes, etc.
- Géométrie : L'inversion ; géométrie projective, etc.
- Théorie des nombres : Arithmétique dans des extensions de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$, comme $\mathbb{Z}[i]$; polynômes cyclotomiques ; Zsigmondy, etc.

4. Par quoi commencer

Pour débuter votre préparation, vous pouvez commencer par la géométrie. D'un côté, la plupart des requis font déjà partie du programme scolaire du collège. D'un autre côté, tous les tests d'olympiades nationales contiennent au moins un problème de géométrie. Finalement, il est souvent le cas qu'aux IMOs, soit P1 soit P4 est un problème de géométrie. La seule exception dans les dix dernières années est

2011. Le deuxième choix serait la combinatoire (sauf le dénombrement). La plupart des problèmes dans cette catégorie sont sous la forme d'énigmes. Familiarisez-vous avec les stratégies de base mentionnées ci-dessus et faites des exercices de ce type régulièrement. L'algèbre semble facile pour la plupart des lycéens. Couvrir les bases que nous avons mentionnées ne doit pas prendre beaucoup de temps. Faites quelques exercices sur les polynômes, les suites, et les équations fonctionnelles. Ne perdez beaucoup de temps avec les inégalités. Au final, la théorie des nombres semble être assez intimidante pour les débutants. Pour cette raison, il n'est pas conseillé de la choisir comme un point de départ. Néanmoins, il serait judicieux de travailler ce sujet petit à petit. Avec le temps, vous n'aurez plus de problèmes à comprendre cette théorie et, comme avec les autres sujets, vous allez pouvoir concentrer vos efforts sur la résolution des problèmes.

5. Vers la médaille d'argent

Le seuil pour la médaille d'argent change beaucoup au cours des années. Son intervalle de variance dans les dix dernières années est entre 19 et 25 points. Les préparations mentionnées ci-haut vous donnent déjà une possibilité d'avoir une médaille d'argent, mais le facteur de chance est assez élevé. Pour le réduire, après avoir 'garanti' une bronze (P1/P4 dans tous les sujets + un bon niveau dans trois des quatre sujets), il faudra travailler les trois sujets choisis jusqu'à 'garantir P2/P5', et travailler le quatrième sujet jusqu'à ce que vous ayez un bon niveau dans ce dernier. Pour garantir une médaille d'argent, vous devrez améliorer votre niveau dans tous les quatre sujets, suffisamment pour pouvoir résoudre tous les P1/P4 et P2/P5 – ce qui n'a jamais été réalisé par un marocain jusqu'à présent. L'une des raisons probables est que le niveau des P2/P5 lui même n'est pas bien déterminé. Des fois ils sont assez faciles, comme par exemple le P2 de 2009. Mais il arrive des fois qu'ils soient très difficiles, comme par exemple, le P5 de 2010 ou bien le P2 de 2011. Détailler une approche garantissant la médaille d'argent est tout d'abord assez prémature pour la scène olympique marocaine, mais surtout au-delà des qualifications de l'auteur. Gardons l'espoir qu'un jour, un jeune lycéen bien motivé aura ces qualifications afin de décrire aux générations futures une méthode de travail qui garantirait la médaille d'argent.