فروض أولمبياد الرياضيات للأولى بكالوريا علوم رياضية
موسم 2016-2017

شكري سعد - العلمي محمد

تقديم

يشمل هذا الملف فروضاً مصححة للأولمبياد الوطنية في الرياضيات و المؤهلة للأدوار النهائية على المستوى الوطني. تتناول هذه الفروض تماريناً تغطي شتى فروع المقرر الدراسي للسلك الثانوي لشعبة العلوم الرياضية كالهندسة و الحسابيات و التعداد. تشكل التمارين المدرجة في هذا الملف مسائل فروض أولمبياد الرياضيات لمستوى الأولى بكالوريا من شعبة الرياضيات لموسم 2016-2017. أخيراً نتمنى أن يقدم هذا العمل المتواضع للطالب المشارك في المنافسات الوطنية للرياضيات السند و كل المتعة. لا نختم قبل أن نشير إلى أن الحلول المقترحة ليست إلا حلولا شخصية و لا تمثل حلولاً رسمية. لكل ملاحظة أو إضافة المرجو الإتصال بنا عبر بريدنا الإلكتروني للصفحة mathsmcontact@gmail.com

نشر بتاريخ
5 يناير 2018

الفرض الأول

المسألة الأولى. حدد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث:

$$3(a^2+b^2)-7(a+b)=-4$$

المسألة الثانية. ليكن ABC مثلثاً و لتكن (C) دائرته المحيطة . منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ يقطع على التوالي $[BC]$ و (C) في النقطتين D و E. لتكن I نقطة من $[DC]$ تخالف D و C و لتكن J نقطة تقاطع المستقيم (EI) و الدائرة (C).

1. بين أن $AB\times AC=AE\times AD$.
2. بين أن النقط A و D و I و J نقط متداورة.

المسألة الثالثة. نلون كل رأس من رؤوس مضلع سداسي محدب $ABCDEF$ بأحد الألوان، أحمر أو أبيض أو أزرق بحيث يظهر كل لون من هذه الألوان بالضبط مرتين بعد تلوين رؤوس هذا المضلع السداسي. حدد عدد الطرق الممكنة لإنجاز هذا التلوين علماً أن كل رأسين متحاديين يختلفان في اللون.

تصحيح الفرض الأول

المسألة الأولى. حدد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث

$$3(a^2+b^2)-7(a+b)=-4$$

الحل. سنستعمل في هذا التمرين تقنية إكمال المربع، بملاحظة أن المعادلة المقترحة تكافئ :

$$(a^2-\frac{7}{3}a)+(b^2-\frac{7}{3}b)=-\frac{4}{3}$$

و التي تكافئ

$$(a^2-\frac{7}{3}a+\frac{49}{36})+(b^2-\frac{7}{3}b+\frac{49}{36})=-\frac{4}{3}+\frac{49}{18}$$

تكافئ

$$(a-\frac{7}{6})^2+(b-\frac{7}{6})^2=\frac{50}{36}$$

تكافئ

$$(6a-7)^2+(6b-7)^2=50$$

بما أن العددين $6a-7$ و $6b-7$ صحيحين نسبيين و العدد 50 يكتب بثلاث كيفيات على شكل مجموع مربعين فإن المعادلة البدئية تكافئ

$$6a-7=5, 6b-7=5 \text{ أو } 6a-7=7, 6b-7=1 \text{ أو } 6a-7=1, 6b-7=7$$

مما يعني أن

$$S=\{(1,0),(0,1),(2,2)\}$$

المسألة الثانية. ليكن ABC مثلثاً و لتكن (C) دائرته المحيطة . **منصف الزاوية** $\widehat{BAC}$ **يقطع على التوالي** $[BC]$ و (C) في النقطتين D و E. لتكن I نقطة من $[DC]$ تخالف D و C و لتكن J نقطة تقاطع المستقيم (EI) و الدائرة (C).

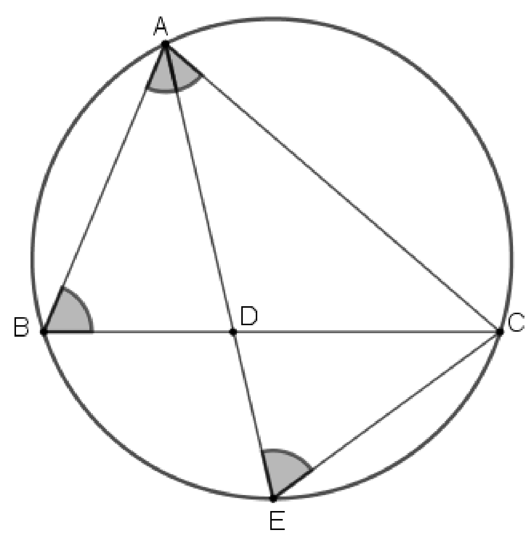
1. بين أن $AB \times AC = AE \times AD$.
2. بين أن النقط A و D و I و J نقط متداورة.

الحل 1. في الشكل أسفله لدينا في المثلثان ABD و ACE ما يلي

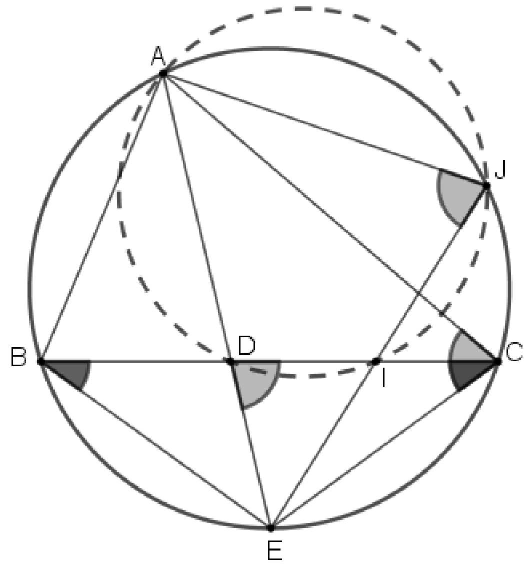
$$\widehat{ABC} = \widehat{AEC} \text{ و } \widehat{BAD} = \widehat{CAE}$$

إذن المثلثان ABD و ACE مثلثان متشابهان ومنه فإن $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$ إذن

$$AB \times AC = AE \times AD$$



2. نعتبر الشكل التالي



أولاً نلاحظ أن المثلث EBC متساوي الساقين رأسه E و ذلك لأن

$$\widehat{EBC} = \widehat{EAC} = \widehat{EAC} = \widehat{ECB}$$

من جهة أخرى لدينا

$$\widehat{ADC} = 180° - \widehat{DBE} - \widehat{DEB} = 180° - \widehat{DCE} - \widehat{DEB}$$

بما أن الزاويتان $\widehat{DEB}$ و $\widehat{DCA}$ محيطيتان تحصران نفس القوس فإنهما متساويتان و بالتالي

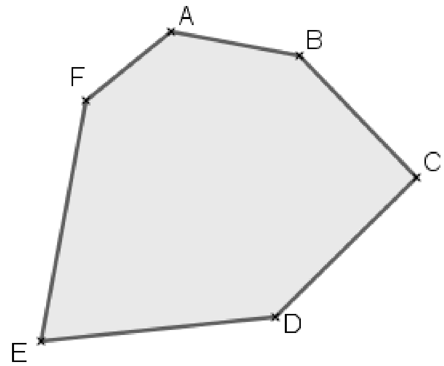
$$\widehat{ADC} = 180° - \widehat{DCE} - \widehat{DCA} = \widehat{ECA}$$

و بما أن الزاويتان $\widehat{ECA}$ و $\widehat{AJE}$ محيطيتان تحصران نفس القوس فإنهما متساويتان و بالتالي

$$\widehat{ADI} = \widehat{ADC} = 180° - \widehat{AJE} = 180° - \widehat{AJI}$$

و منه فإن الرباعي $ADIJ$ رباعي دائري.

المسألة الثالثة. نلون كل رأس من رؤوس مضلع سداسي محدب $ABCDEF$ بأحد الألوان، أحمر أو أبيض أو أزرق بحيث يظهر كل لون من هذه الألوان بالضبط مرتين بعد تلوين رؤوس هذا المضلع السداسي. حدد عدد الطرق الممكنة لإنجاز هذا التلوين علماً أن كل رأسين متحاديين يختلفان في اللون.



الحل. ليكن N العدد المطلوب. هناك ثلاث إمكانيات لإختيار لون للنقطة A، امكانيتان لتلوين النقطة B لأن لون النقطة B يجب أن يكون مختلفاً عن لون النقطة A، إمكانيتان لتلوين النقطة C، إمكانية وحيدة لتلوين النقط المتبقية لأنه لا يجب إستعمال كل لون إلا مرتين. كخلاصة فإن عدد الإمكانيات الإجمالي هو $3 \times 2 \times 2 \times 1$ و بالتالي $N = 12$.

الفرض الثاني

المسألة الأولى. حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تنتمي إلى المجموعة $\{1, 2, ..., 100\}$ لكي يكون العدد $8n+1$ مربعاً كاملاً.

المسألة الثانية. نقول إن ثلاثيتا الحدود $P(x) = x^2 + ax + b$ و $Q(x) = x^2 + cx + d$ وديتان ، إذا كانت P تقبل جذرين $x_1 < x_2$ و Q تقبل جذرين $x_3 < x_4$ حيث $x_1 + x_3$ و $x_2 + x_4$ جذران لثلاثية الحدود $P + Q$. لتكن M مجموعة من ثلاثيات حدود ودية مثنى مثنى، المجموعة M تحوي على الأقل ثلاث عناصر. بين أن 0 جذر مشترك لجميع عناصر المجموعة M.

المسألة الثالثة. لتكن K نقطة خارج دائرة (ζ) . مماسا الدائرة (ζ) المران من K يقطعانها في النقطتين A و B. لتكن C نقطة من الدائرة (ζ) بحيث يكون المستقيم (AC) موازياً للمستقيم (KB). لتكن E نقطة التقاطع الثاني للمستقيم (KC) و الدائرة (ζ).

1. بين أن المستقيم (AE) يمر من منتصف القطعة $[KB]$.
2. ليكن F تقاطع المستقيمين (AE) و (BC). أثبت أن:

$$\frac{AB}{EB} \times \frac{AC}{EC} = \frac{AF}{EF}$$

تصحيح الفرض الثاني

المسألة الأولى. حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تنتمي إلى المجموعة $\{1,2,...,100\}$ لكي يكون العدد $8n+1$ مربعاً كاملاً.

الحل العدد $8n+1$ مربع كامل، إذن يوجد m من $\mathbb{N}$ بحيث

$$8n+1=m^2$$

علماً أن العدد $8n+1$ فردي فإن m كذلك فردي، و بالتالي يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث

$$m=2k+1$$

و منه نستنتج أن

$$8n=m^2-1=(m-1)\times(m+1)=4k(k+1)$$

يعني

$$2n=k(k+1)$$

و بما أن $n\in\{1,2,...,100\}$ فإن

$$k(k+1)\in\{1,2,...,200\}$$

نلاحظ أن $200 \leq k^2+k \leq k^2$ إذن $k\in\{1,2,...,14\}$ و بالتالي:

$$2n\in\{2,6,12,20,30,42,56,72,90,110,132,156,182\}$$

أي أن:

$$n\in\{1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91\}$$

عكسياً نتحقق أن الأعداد $8n+1$ مربعات كاملة لكل من هاته الأعداد.

المسألة الثانية. نقول إن ثلاثيتا الحدود $P(x) = x^2 + ax + b$ و $Q(x) = x^2 + cx + d$ وديتان ، إذا كانت P تقبل جذرين $x_1 < x_2$ و Q تقبل جذرين $x_3 < x_4$ حيث $x_1 + x_3$ و $x_2 + x_4$ جذران لثلاثية الحدود $P + Q$. لتكن M مجموعة من ثلاثيات حدود ودية مثنى مثنى، المجموعة M تحوي على الأقل ثلاث عناصر. بين أن 0 جذر مشترك لجميع عناصر المجموعة M.

الحل (عن موقع رياضيات النجاح، حل من إقتراح الأستاذ سمير الخريسي)

لتكن $P(x) = x^2 + ax + b$ حدودية من M. ليكن α و β جدرا الحدودية P. بما أنه توجد على الأقل ثلاثة عناصر من M فإنه توجد ثلاثيا حدود $Q(x) = x^2 + cx + d$ و $L(x) = x^2 + ex + f$. ليكن p و q جدرا الحدودية Q بحيث $p < q$ و u و v جدرا الحدودية L بحيث $u < v$. نعلم أن:

$$\alpha + \beta = -a; \alpha \times \beta = b \text{ و } p + q = -c; p \times q = d \text{ و } u + v = -e; u \times v = f$$

علما أن ثلاثيا الحدود P و Q وديتان فإن

$$(\alpha + p) \times (\beta + q) = b + d$$

و بالتالي

$$\underbrace{\alpha \times \beta}_{b} + \underbrace{p \times q}_{d} + \alpha q + \beta p = b + d$$

و منه نستنتج أن $\alpha q = -\beta p$ و بنفس الطريقة نبرهن أن $\alpha v = -u\beta$. لخلاصة:

$$\alpha q = -p\beta \text{ و} \alpha v = -q\beta \text{ و} pv = -qu$$

نفترض أن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ ، من ما سبق لدينا

$$pv = -qu \text{ و } \alpha\beta qu = \alpha\beta pv$$

إذن

$$pv = qu = -qu$$

و بالتالي

$$q = 0 \text{ أو } u = 0$$

و منه فإن

$$p = 0 \text{ أو } v = 0$$

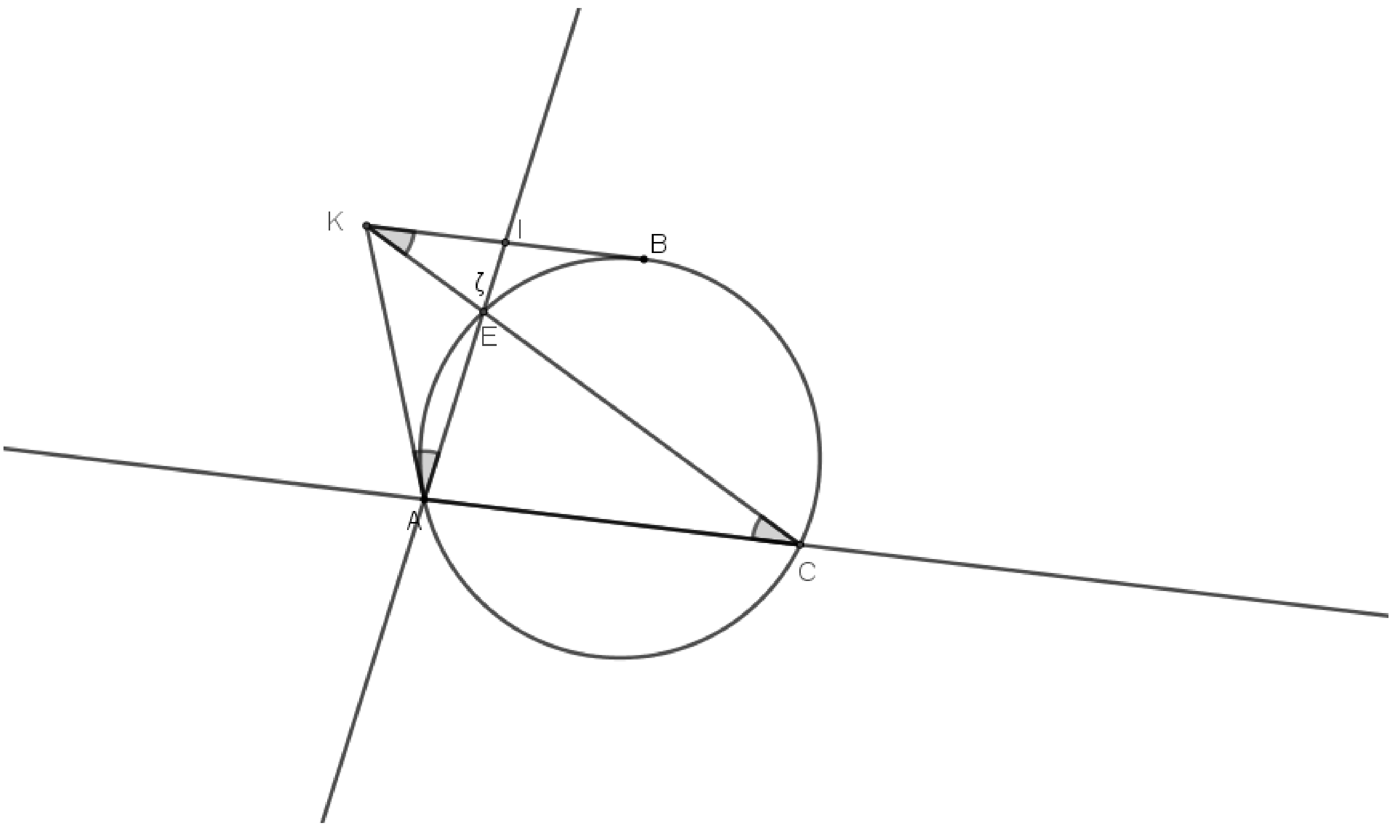
و هذا غير ممكن لأن $p < q$ و $u < v$.

افتراضنا خاطئ، إذن أحد جدري ثلاثية الحدود P منعدم لكل P من M و بالتالي الصفر جدر مشترك لجميع عناصر المجموعة M.

المسألة الثالثة. لتكن K نقطة خارج دائرة (ζ) . مماسا الدائرة (ζ) المران من K يقطعانها في النقطتين A و B. لتكن C نقطة من الدائرة (ζ) بحيث يكون المستقيم (AC) موازياً للمستقيم (KB). لتكن E نقطة التقاطع الثاني للمستقيم (KC) و الدائرة (ζ).

1. بين أن المستقيم (AE) يمر من منتصف القطعة $[KB]$.
2. ليكن F تقاطع المستقيمين (AE) و (BC). أثبت أن: $\dfrac{AB}{EB} \times \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AF}{EF}$

الحل 1. حسب مبرهنة قوة النقطة فإن: $IB^2 = IE \times IA$



من جهة أخرى, المثلثان IKE و IAK متشابهان و ذلك لأن $\widehat{IAK} = \widehat{ECA} = \widehat{IKE}$. إذن:

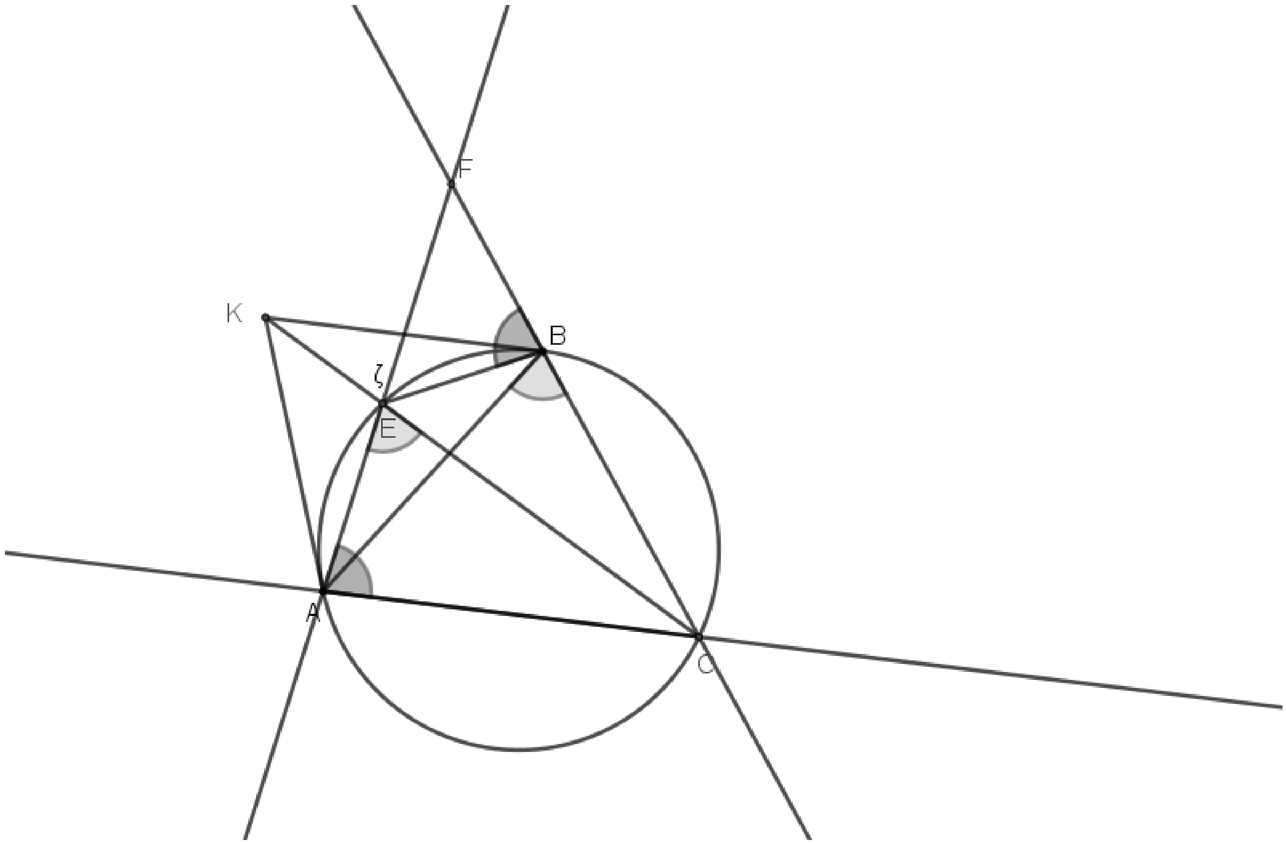
$$\frac{IK}{IA} = \frac{IE}{IK}$$

و بالتالي

$$IK^2 = IE \times IA$$

خلاصة فإن $IB = IK$ و بالتالي النقطة I منتصف القطعة $[BK]$.

2. نعتبر الشكل التالي



سنبرهن أن

$$\frac{AB}{EB} \times \frac{AC}{EC} \times \frac{EF}{AF} = 1$$

الذي يكافئ

$$\frac{AB}{AF} \times \frac{AC}{EC} \times \frac{EF}{EB} = 1$$

بتطبيق علاقة الجيوب و الأطول في كل من المثلثات ABF و EFB و ACE نحصل على

$$\frac{AC}{EC} = \frac{sin(\widehat{EAC})}{sin(\widehat{AEC})} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AF} = \frac{sin(\widehat{ABC})}{sin(\widehat{AFC})} \quad \text{و} \quad \frac{EF}{EB} = \frac{sin(\widehat{AFC})}{sin(\widehat{FBE})}$$

علما أن كلا من الزاويتين $\widehat{AEC}$ و $\widehat{ABC}$ و الزاويتين $\widehat{EAC}$ و $\widehat{EBF}$ محيطيتان فإن $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ و $\widehat{EBF} = \widehat{EAC}$ و منه :

$$\frac{AB}{EB} \times \frac{AC}{EC} \times \frac{EF}{AF} = 1$$

و هذا ينهي البرهان .

الفرض الثالث

المسألة الأولى. نتوفر على 12 كرسي مرقم من 1 إلى 12. يستطيع ضفدع القفز من كرسي إلى آخر متبعاً القاعدة التالية :
إنطلاقاً من كرسي رقمه k، يمكن لضفدع أن يقفز إلى كرسي رقمه n إذا و فقط إذا كان $|k-n|=5$ أو $|k-n|=8$ لكل $k,n \in \{1,2,...,12\}$. علماً أن هذا الضفدع نجح في القفز على جميع هذه الكراسي ماراً بكل كرسي مرة واحدة بالضبط. حدد جميع الحالات الممكنة لرقم الكرسي الذي يجب أن ينطلق منه الضفدع.

المسألة الثانية. ليكن $[AB]$ وتراً مشتركاً لدائرتين متقاطعتين (C_1) و (C_2). نعتبر مستقيماً يمر من النقطة A و يقطع الدائرتين (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطتين C و D. المماسين للدائرتين (C_1) و (C_2) في على التوالي النقطتين C و D يتقاطعان في النقطة E.

1. بين أن الرباعي $ECBD$ دائري.
2. بين أن $\widehat{ABE} = |\widehat{ECD} - \widehat{EDC}|$.

المسألة الثالثة. حل في $(\mathbb{R}^+)^3$ نظمة المعادلات التالية

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 - y = (z-1)^2 \\ (2) & y^2 - z = (x-1)^2 \\ (3) & z^2 - x = (y-1)^2 \end{array}$$

تصحيح الفرض الثالث

المسألة الأولى. نتوفر على 12 كرسي مرقم من 1 إلى 12. يستطيع ضفدع القفز من كرسي إلى آخر متبعاً القاعدة التالية:
إنطلاقاً من كرسي رقمه k، يمكن لضفدع أن يقفز إلى كرسي رقمه n إذا و فقط إذا كان $| k - n |= 5$ أو $| k - n |= 8$ لكل $k, n \in \{1, 2, ..., 12\}$. علماً أن هذا الضفدع نجح في القفز على جميع هذه الكراسي ماراً بكل كرسي مرة واحدة بالضبط. حدد جميع الحالات الممكنة لرقم الكرسي الذي يجب أن ينطلق منه الضفدع.

الحل أولاً نبدأ بدراسة أرقام المواضع التي يمكن للضفدع أن يصل إليها إنطلاقاً من القفز من الموضع k.
نلاحظ أنه إذا كان الضفدع في الموضع k حيث $k \in \{5, 8\}$ فإنه لا يمكنه القفز إلا إلى موضع وحيد:
- إذا كان $k = 5$ فإن الضفدع يمكنه أن يقفز إلى الموضع n حيث n حل للمعادلة $| n - 5 |= 5$ أو حل للمعادلة $| n - 5 |= 8$، يعني $n = 10$.
- إذا كان $k = 8$ فإن الضفدع يمكنه أن يقفز إلى الموضع n حيث n حل للمعادلة $| n - 8 |= 5$ أو حل للمعادلة $| n - 5 |= 8$، يعني $n = 3$.
- إذا كان $k \neq 5, 8$ فإن الضفدع يمكنه أن يقفز إلى الموضع n حيث n حل للمعادلة $| n - k |= 8$ أو $| n - k |= 5$، نلاحظ أن كلا من المعادلتين السابقتين تقبل بالظبط حلا واحدا. إذن إنطلاقاً من الموضع k يمكن للضفدع القفز إلى موضعين.
حسب معطيات المسألة فإن الضفدع لا يمكنه المرور عبر كل موضع إلا مرةً بالضبط، نستنج من خلال ما سبق أن متتالية أرقام المواضع التي سيمر عبرها الضفدع ستكون على سبيل المثال كالتالي:

$$8 - 3 - 11 - 6 - 1 - 9 - 4 - 12 - 7 - 2 - 10 - 5$$

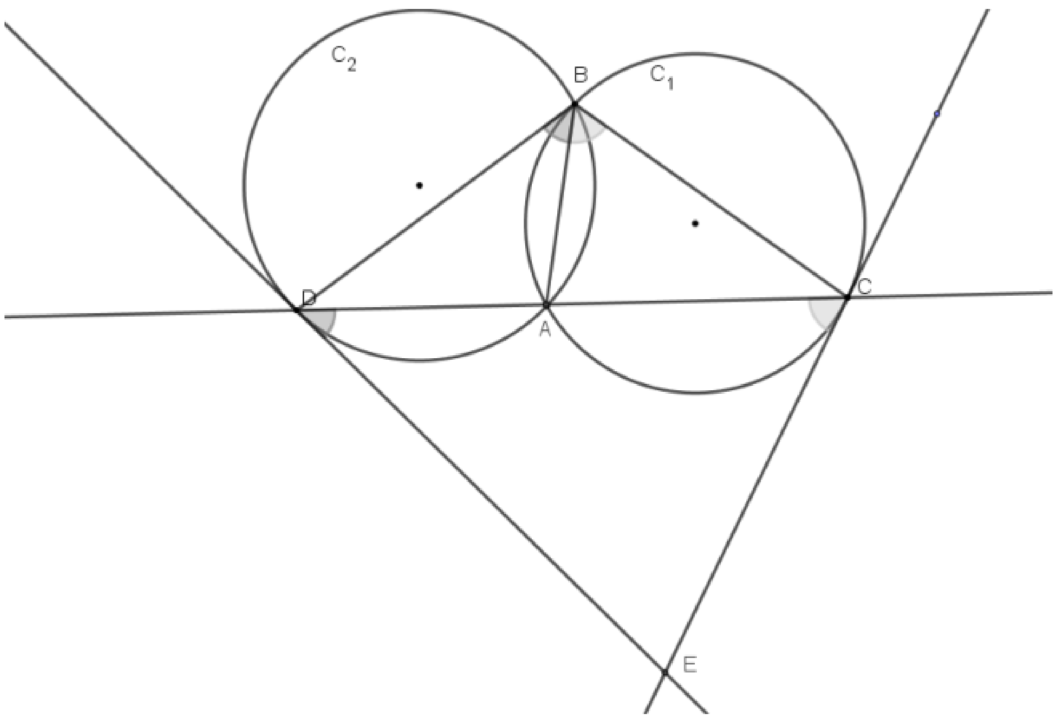
و منه فإن رقمي الحدين الأول و الأخير لا يكونان إلا خمسة أو ثمانية. إذن الحالتين الممكنتين لرقم الكرسي الذي يجب أن ينطلق منه الضفدع هما:
- ان يكون الرقم الاول ثمانية كما فالسلسلة اعلاه.
- ان يكون الرقم خمسة كما في السلسلة اسفله:

$$5 - 10 - 2 - 7 - 12 - 4 - 9 - 1 - 6 - 11 - 3 - 8$$

المسألة الثانية. ليكن $[AB]$ وتراً مشتركاً لدائرتين متقاطعتين (C_1) و (C_2). نعتبر مستقيماً يمر من النقطة A و يقطع الدائرتين (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطتين C و D. المماسين للدائرتين (C_1) و (C_2) في على التوالي النقطتين C و D يتقاطعان في النقطة E.

1. بين أن الرباعي$ECBD$ دائري.
2. بين أن $|\widehat{ECD} - \widehat{EDC}| = \widehat{ABE}$.

الحل 1. الشكل التالي يحقق معطيات التمرين

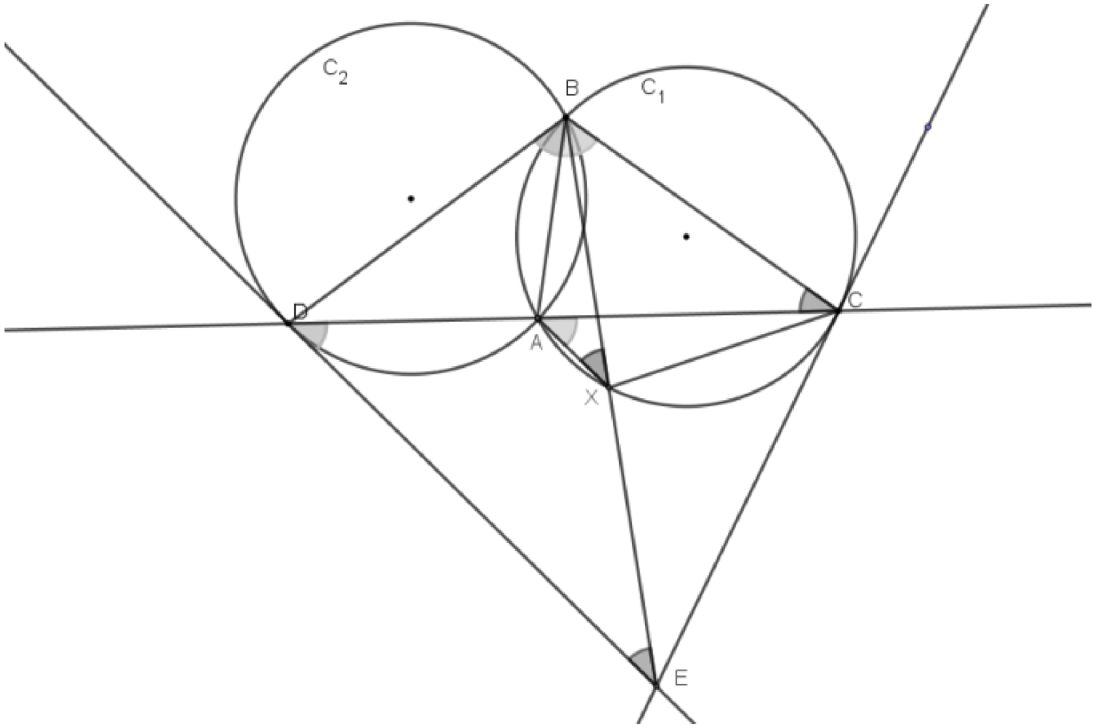


لدينا

$$\begin{aligned}\widehat{DEC} + \widehat{DBC} &= \widehat{ABD} + \widehat{ABC} + \widehat{DEC} \\ &= \widehat{EDC} + \widehat{ECD} + \widehat{DEC} \\ &= \pi\end{aligned}$$

إذن الرباعي $ECBD$ رباعي دائري.

2. في الشكل التالي لدينا $\widehat{EDC} < \widehat{ECD}$



لكي نبرهن أن $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ يكفي أن نبرهن أن $\widehat{ABE} = \widehat{ECD} - \widehat{EDC}$.
لتكن النقطة X تقاطع المستقيم (AE) و الدائرة (C_1).
أولاً أن المستقيمان (AX) و (DE) متوازيان و ذلك لأن

$$\widehat{AXB} = \widehat{ACB} = \widehat{DEB}$$

و بالتالي

$$\widehat{XAC} = \widehat{EDC}$$

و بما أن الزاويتان $\widehat{EDC}$ و $\widehat{ABD}$ زاويتان محيطيتان فإن

$$\widehat{XAC} = \widehat{ABD}$$

علماً أن أن الزاويتان $\widehat{XAC}$ و $\widehat{EBC}$ زاويتان محيطيتان فإن

$$\widehat{EBC} = \widehat{XAC}$$

إذن

$$\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$$

و منه المطلوب.

المسألة الرابعة. حل في $(\mathbb{R}^+)^3$ نظمة المعادلات التالية

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 - y = (z-1)^2 \\ (2) & y^2 - z = (x-1)^2 \\ (3) & z^2 - x = (y-1)^2 \end{array}$$

الحل (من إقتراح ادرويش يونس)

نجمع معادلات النظمة طرفاً طرفاً فنحصل على

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z)$$

يعني

$$-2(x+y+z) + 3 = -(x+y+z)$$

و بالتالي

$$x + y + z = 3$$

النظمة المقترحة متماثلة بالنسبة للمجاهيل. نفترض إذن أن

$$x \leq y \leq z$$

سوف نبرهن أن $x = 1$، نفترض العكس. إذا كان $x > 1$ فإن

$$x + y + z \geq 3x > 3$$

و هذا غير ممكن .

إذا كان $x < 1$، مع العلم ان:

$$x^2 - y = (z-1)^2$$

فإن: $y \geq x^2$ و بالتالي $x > x^2 \geq y$ و هذا غير ممكن.

نخلص إلى أن: $x = 1$، و بالتالي $y^2 - z = 0$ و منه فإن $y^2 + y - 2 = 0$ إذن $y = 1$ لأن $y \geq 0$، و لدينا $z = 3 - x - y = 1$. عكسياً، المثلوث $(1,1,1)$ حل للنظمة المقترحة. و منه فإن

$$S = \{(1,1,1)\}$$

الفرض الرابع

المسألة الأولى. قسم بستاني قطعة أرض عبارة عن مربع إلى 25 خانة مربعات الشكل و متطابقة. زرع البستاني بطريقة عشوائية 51 بدرة في هذه الأرض.
أثبت أن البستاني قد زرع على الأقل ثلاث بذور داخل قرص شعاعه $\frac{1}{7}$.

المسألة الثانية. نعتبر مثلثاً ABC و ليكن O مركز دائرته المحيطة. لتكن (ζ) دائرة تمر من A و B و لا تمر من C. الدائرة (ζ) تقطع المستقيمين (AC) و (BC) على التوالي في النقطتين E و F
برهن أن المستقيمين (EF) و (OF) متعامدان.

المسألة الثالثة. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية ذات حدود موجبة قطعاً.
- نقول أن المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (L) إذا وجد عدد حقيقي $q > 1$ بحيث لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$.
- نقول أن المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (S) إذا وجد عدد حقيقي $r > 1$ بحيث يحتوي المجال $]x, rx[$ على حد واحد على الأكثر من حدود هذه المتتالية و ذلك لكل $x > 0$.

1. بين أنه إذا كانت المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (L) فإنها تحقق الخاصية (S).
2. إذا كانت المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (S) فهل تحقق كذلك الخاصية (L) ؟

تصحيح الفرض الرابع

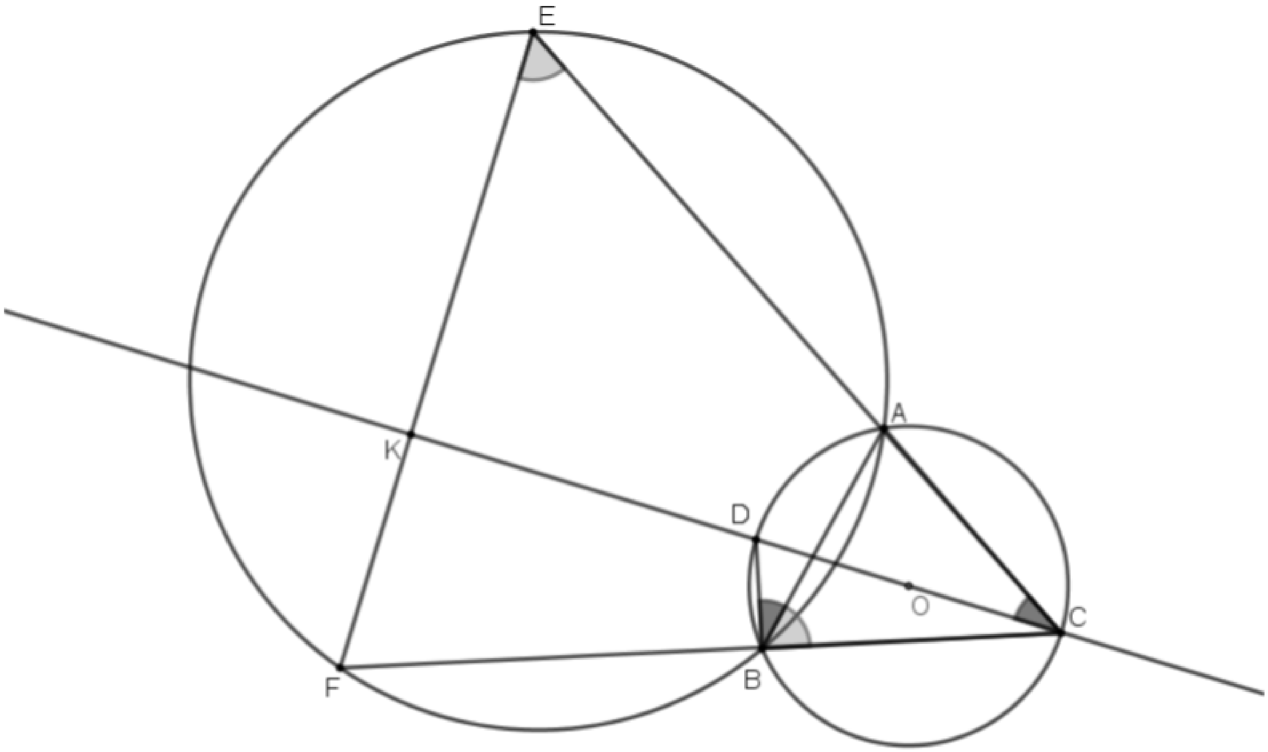
المسألة الأولى. قسم بستاني قطعة أرض عبارة عن مربع إلى 25 خانة مربعات الشكل و متطابقة. زرع البستاني بطريقة عشوائية 51 بدرة في هذه الأرض.
أثبت أن البستاني قد زرع على الأقل ثلاث بذور داخل قرص شعاعه $\frac{1}{7}$.

الحل تم توزيع 51 بذرة بشكل عشوائي على 25 خانة، إذن توجد خانة من بين الخمس و عشرين خانة تحوي ثلاثة بذرات. علما أن مساحة كل خانة من بين الخمس و العشرين خانة مساحتها $\frac{1}{25}$. فإن كل خانة من الخانات محاطة بدائرة شعاعها $\frac{1}{7}$ و ذلك لأن $\frac{1}{25} < \frac{\pi}{49}$ و بهذا نكون قد انهينا البرهان.

المسألة الثانية. نعتبر مثلثاً ABC و ليكن O مركز دائرته المحيطة. لتكن (ζ) دائرة تمر من A و B و لا تمر من C. الدائرة (ζ) تقطع المستقيمين (AC) و (BC) على التوالي في النقطتين E و F

برهن أن المستقيمين (EF) و (OF) متعامدان.

الحل نعتبر الشكل التالي الذي يحقق معطيات المسألة



لتكن D نقطة تقاطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و المستقيم (OC) و لتكن K تقاطع المستقيم (OC) و الدائرة (ζ). لدينا:

$$\begin{aligned}
\widehat{CKE} &= 180° - (\widehat{KEC} + \widehat{ECK}) \\
&= 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{CBA}) \\
&= 180° - 90° = 90°
\end{aligned}$$

و منه فإن المستقيمين (EF) و (OC) متعامدان.

المسألة الثالثة. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية ذات حدود موجبة قطعاً.
- نقول أن المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (L) إذا وجد عدد حقيقي $q > 1$ بحيث لكل n من $\mathbb{N}$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$.
- نقول أن المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (S) إذا وجد عدد حقيقي $r > 1$ بحيث يحتوي المجال $]x, rx[$ على حد واحد على الأكثر من حدود هذه المتتالية و ذلك لكل $x > 0$.

1. بين أنه إذا كانت المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (L) فإنها تحقق الخاصية (S).

2. إذا كانت المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (S) فهل تحقق كذلك الخاصية (L) ؟

الحل 1. لتكن المجموعة $\Omega_n = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$، المطلوب هو اثبات العبارة التالية

$$(\exists r > 1)(\forall x > 0), \text{Card}(]x, rx[\cap\Omega_n \leq 1)$$

نأخد $r = q$، ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^{+*}$، نفترض وجود عنصرين a_p و a_q من Ω_n بحيث $a_p, a_q \in]x, qx[$ بما أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا $a_{n+1} \geq qa_n > a_n$ فإن المتتالية (a_n) تزايدية قطعاً و منه فإن

$$x < a_p \leq a_{q-1} < a_q < qx$$

حيث إفترضنا أن $a_p < a_q$.
و بالتالي

$$x < a_q < qx \text{ و } \frac{1}{qx} < \frac{1}{a_{q-1}} < \frac{1}{x}$$

و منه فإن $\dfrac{a_q}{a_{q-1}} < q$ و هذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ و بالتالي

$$(\exists r > 1)(\forall x > 0), \text{Card}(]x, rx[\cap\Omega_n \leq 1)$$

2. لتكن (a_n) متتالية معرفة كما يلي

$$(\forall n \in \mathbb{N}), a_n = 2^n$$

لتكن (b_n) المتتالية المعرفة بما يلي

$$(\forall n \in \mathbb{N}), b_{2n+1} = a_{2n} \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}), b_{2n} = a_{2n+1}$$

بما أن المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (L) فإنه حسب السؤال الأول المتتالية (a_n) تحقق الخاصية (S)، نلاحظ أن المتتالية (b_n) كذلك تحقق الخاصية (S) لكنها لا تحقق الخاصية (L).