Sommes et Produits

Choukri Saâd

Math & Maroc

Résumé

Ce cours comportera dans un premier temps la notion de suite ainsi que quelques types de suites particuliéres dont la connaissance est préalable. Ceci nous aidera largement dans la manipulation des sommes et des produits, vu que les propriétés des sommes et des produits n'est abordé j'usqu'à le cycle universitaire, leur connaissance est indispensable pour un éleve souhaitant participer aux competitions de mathématiques.

1 Suites

En mathématiques, une suite est une famille d'éléments — appelés ses « termes » — indexée par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé « longueur » de la suite.

Lorsque tous les éléments d'une suite (infinie) appartiennent à un même ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E. On note souvent une suite : (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier, on parle de suite « entière », suite « réelle » et suite « complexe », quand E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, respectivement.

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant une constante appelée raison de cette suite.
Cette définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, pour chaque indice n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

D'aprés cette définition on peut déduire par une récurence immédiate que le terme géneral de la suite (u_n) est donné par :

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r \text{ pour : } n_0 \leq n$$

En particulier pour $n_0 = 0$, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

On peut aussi trouver une forme de la somme des termes de la suite (u_n). En effet par une simple récurence sur n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr)$$

Cette formule permet de montrer le cas général pour $p \leq n$:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Exemple 1. *1) Calculez la somme suivante :*

$$S = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

On remarque que la suite qui a pour terme géneral $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique, donc :

$$S = \frac{n}{2}(2 + (n-1)2) = n^2$$

Suites géometriques

En mathématiques, une suite géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un facteur constant appelé raison (différent de 1). Ainsi, une suite géométrique a la forme suivante :

$$a, aq, aq^2, aq^3, ...$$

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = qu_n$$

Comme pour les suites arithmétiques, d'aprés cette définition on peut montrez par une simple récurence sur n que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = q^n a$$

On peut aussi trouver une forme de la somme des termes de la suite (u_n). En effet par une simple récurence sur n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 2. *1) Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \neq 1$ on a :*

$$1 + n + ... + n^k = \frac{n^{k+1} - 1}{n - 1}$$

et pour n=1, on a :

$$1 + n + ... + n^k = k + 1$$

2) Si a, b, c, d sont des termes successifs d'une suite géometrique, montrez que :

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$$

On suppose la suite qui a pour termes a, b, c, d de raison r, on a alors : $b = ar$, $c = ar^2$ et $d = ar^3$:

$$\begin{aligned} LHS &= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2 \\ &= a^2[((r - r^2)^2) + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2] \\ &= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2] \\ &= a^2(r^6 - 2r^3 + 1) = (a - ar^3)^2 \\ &= RHS \end{aligned}$$

3) On définit une suite (u_n) par :

$$u_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Trouvez le terme géneral de la suite (u_n) en fonction de n.

Soit n un entier naturel, on a :

$$u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$$

Ensuite on pose :

$$v_n = u_n + 1$$

La détermination du terme géneral de la suite (v_n) permet de déduire celui de la suite (u_n), mais la suite (v_n) est une suite géometrique de raison 2, alors on a :

$$v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 + 1) = 2^{n+1}$$

On en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 2^{n+1} - 1$$

La réciproque est immédiate.

2 Sommes, le symbole $\sum$

L'utulisation du symbole $\sum$ a connu son apparition avec les mathématiciens du XVIII ciécle, pour la facilté que présente celui-ci au niveau des manipulations des sommes.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme $u_0+u_1+...+u_n$ est noté : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, en géneral la somme : $u_p+u_{p+1}+...+u_n$ est noté : $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k$ pour $p \leq n$.
- La somme ne dépend pas de l'indice de sommation k.

Voyons quelques régles de calcul de sommes :

Considérons (u_n) et (v_n) deux suites, et λ, γ des constantes réelles, on a :

$$\sum_k \lambda u_k = \lambda \sum_k u_k$$

En géneral on a la propriété de linearité :

$$\sum_k (\lambda u_k + \gamma v_k) = \lambda \sum_k u_k + \gamma \sum_k v_k$$

Exemple 3. *1) Calculez les deux sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (3^k + 12k)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{77...7}_{k}$$

Par les propriétés de calcul on a :
-

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (3^n + 12n) = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 12\sum_{k=0}^{n} k = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 12\frac{n(n+1)}{2}.$$

-

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{77...7}_{k} = 7\sum_{k=1}^{n} \underbrace{11...1}_{k} = 7\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} 10^i = 7\sum_{k=1}^{n} \frac{10^{k+1}-1}{9} = \frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^{k+1}-1) = \frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^{k+1} - \frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n} 1 =$$
$$7(\frac{10}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9}) = 7(\frac{10}{9}\frac{10^{n+1}-1}{9} - \frac{n}{9}) = 7(\frac{10^{n+2}-10}{81} - \frac{n}{9}) = 7\frac{10^{n+2}-9n-10}{81}.$$

Sommation par paquets :

On a d'abord tout simplement :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \text{ si : } m \leq p \leq n.$$

En géneral on a pour E, A, B des parties de $\mathbb{N}$ non vides telles que : $E = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$:

$$\sum_{k\in E} a_k = \sum_{k\in A} a_k + \sum_{k\in B} a_k$$

Exemple 4. *Calculez les deux sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{2n} min(n,k) \;\; et \sum_{k=0}^{2n} max(n,k) \;\; et \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}k$$

Sommes télescopiques :

Les sommes télescopiques apparaissent largement au monde olympique, en effet elles permettent de rendre plusieurs services. Elles sont à la base des démonstrations des formules concernant les suites arithmétiques et géometriques.

On appelle somme télescopique toute somme qui prend la forme :

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$$

Et cette somme vaut exactement :

$$u_{n+1} - u_{n_0}$$

Essayons d'illustrer cette technique par les exemples et les exercices :

Exemple 5. *1) Calculez la somme suivante :*

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

Commençons par remarquer que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On en déduit que la somme recherchée est une somme télescopique, d'ou :

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

- En s'inspirant de cette méthode, essayez de trouver la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

2) Montrez que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Il s'agit de montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

On commence par remarquer que : $k^2 \geq k^2 - k = k(k-1)$ c-à-d : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$, d'ou :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$$

3) Calculez la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} log_2(\frac{k+1}{k})$$

4) Finissons par un exercice extrait de "l'olympiade de Syrie" :

Simplifiez la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$$

Le dénominateur nous fait penser à l'identité de "Sophie Germain" :

$$4a^4 + b^4 = (2a^2 + 2ab + b^2)(2a^2 - 2ab + b^2)$$

Et en écrivant :

$$4k = (2k^2 + 2k + 1) - (2k^2 - 2k + 1)$$

on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4 + 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2 - 2k + 1} - \frac{1}{2k^2 + 2k + 1}$$

On remarque aussi que les deux expressions : $2k^2 - 2k + 1$ *et* $2k^2 + 2k + 1$ *sont deux termes successifs de la suite de terme géneral :* $u_n = 2n^2 - 2n + 1$. *Or d'aprés un telescopage on obtient :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4 + 1} = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} = \frac{2n(n+1)}{2n^2 + 2n + 1}$$

- En remarquant que $k.k! = (k+1)! - k!$, *simplifier :*

$$S = \sum_{k=1}^{n} k.k!$$

3 Produits, le symbole $\prod$

Soient m et n deux entiers naturels, on a :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times ... \times a_n \text{ tel que : } m \leq n.$$

On a les propriétés suivantes de calcul des produits :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k$$

En particulier on a :

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} a_k$$

Exemple 6. *1) En utulisant un produit télescopique simplifier le produit :*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})$$

2) Soit $n \geq 2$, *montrez l'inégalité suivante :*

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) \geq \frac{1}{2}$$

On a :

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k}) \times \prod_{k=2}^{n} (1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}.\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

3) Calculez :

$$P = 2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{3^2}} \times 8^{\frac{1}{3^3}} \times 16^{\frac{1}{3^4}} \times ....$$

Exercices

Exercice 1

Simplifiez ce qui suit :

$$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n+1}n$$

$$S_2 = \frac{5}{4} + \frac{8}{4^2} + \frac{11}{4^3} + \frac{14}{4^4} + ... + \frac{5+3(n-1)}{4^n}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k}{3^{k+1}}$$

Exercice 2

Simplifier le produit suivant :

$$P_1 = \prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1}$$

Exercice 3 (Olympiade rég Casa 2013)

Si on écrit :

$$A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{3}{4} + ... + \frac{1}{21\cdot 22}$$

$$B = \frac{1}{12\cdot 22} + \frac{1}{13\cdot 21} + \frac{1}{14\cdot 20} + ... + \frac{1}{22\cdot 12}$$

Montrez que $\frac{A}{B}$ un entier naturel.

Exercice 4 (Maroc-MO 1989)

Calculez :

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{2n}$$

Exercice 5 (Maroc-MO 2009)

Montrez que :

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n} + \underbrace{11...1}_{n+1} - \underbrace{66...6}_{n}} \in \mathbb{N}$$

Exercice 6 (Croitia)

$x_1, x_2, ...x_{1006}$ et a des nombres réels qui vérifient :

— $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = ... = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011} = a$
— $x_1 + x_2 + ... + x_{1006} = 503^2$

Trouvez la valeur de x_{1006}.

Exercice 7 (Maroc-MO 2014)

Pour tout entier naturel non nul k on définie :

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{i}$$

Montrez que l'égalité $\quad 1 + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) = H_{n+1} \quad$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.