SOMMES DOUBLES, SUITES RÉCURENTES

CHOUKRI SAÂD

Stage d'Avril 2018

1 SOMMES DOUBLES

Si l'ensemble d'indexation décrivant une somme apparaît comme étant constitué de couples, on dit que cette somme est une somme double.
Nous allons voir des exemples concrets de sommes doubles ci-dessous :

1.1 Somme rectangulaire

Soient I et J des ensembles finis et, pour tout $(i, j) \in I \times J$, $a_{i,j}$ un nombre réel. La somme double suivante

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$$

est dite rectangualaire.

1.1.1 Remarque

Avec les notations précédentes on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}$$

*Démonstration.*Les trois sommes des membres de cette identité comportent exactement les mêmes termes, elles sont donc égales. En fait, on peut aussi comprendre la transformation d'écriture comme étant obtenue via sommation par paquets.

1.1.2 Exemple

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} (i+j)$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} (i+j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} i + \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} j$$

D'une part

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i = \sum_{i=1}^{n} mi = m\sum_{i=1}^{n} i = m\frac{n(n+1)}{2}$$

D'autre part

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{m} ni = n\sum_{j=1}^{m} j = n\frac{m(m+1)}{2}$$

On en déduit

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} (i+j) = \frac{mn(m+n+2)}{2}$$

1.2 Produit de deux sommes

Typiquement, on peut faire apparaître une somme double rectangulaire en développant deux sommes l'une sur l'autre :
Avec des notations entendues

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

En effet,
Pour la somme en l'indice i, la deuxième en l'indice j apparaît comme une constante λ et donc

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I} a_i \left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Le facteur a_i apparaît aussi comme une constante λ pour la somme en l'indice j

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I} a_i \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j =_{\text{déf}} \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

1.2.1 Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculons la somme

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$$

On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \times \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i \times \sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.3 Somme triangulaire

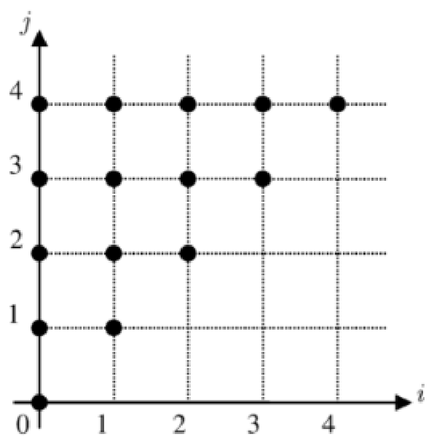
Un cas particulièrement remarquable de somme double est celui où le domaine de sommation porte sur des indices entiers i et j vérifiant une inégalité du type $i \leqslant j$ ou $i < j$. On parle de somme triangulaire.

1.3.1 Exemple

Calculons la somme

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i + j$$

Les indices (i, j) sur lesquels la sommation est réalisée correspondent aux couples suivants



Ces couples peuvent être décrits en faisant varier j de 1 à n puis en faisant varier i de 1 à j. Ainsi

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i + j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant j} i + j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (i + j) =$$

et on a

$$\sum_{i=1}^{j} (i + j) = \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{j} j = \frac{j(j+1)}{n} + j^2 = \frac{3j^2 + j}{2}$$

Ainsi,

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i + j = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

1.3.2 Remarque 1

- La somme précédente peut être évaluée en remarquant que

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i + j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \leqslant j \leqslant n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (i + j)$$

- Exercices -

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\, i-j \,|$$

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{i+j} \qquad \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p$$

Exercice 3((Encore la somme des carrés et des cubes).

1/ En calculant de deux manières la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k$, retrouver la formule explicite de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2/ Adapter cet argument pour le calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2 Suites récurentes

Une suite récurente est la donnée de son premier terme u_{n_0} $(n_0 \geqslant 0)$ et d'une relation de récurence

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

Dans ce cours on s'interessera pas à l'étude analytique et le comportement asymptotique de ce genre de suite, ce qui nous importe le plus sont les propriétés algèbriques de quelques types de suites récurentes particulières à savoir les suites récurentes linéaires, les suites récurentes homographiques ...

Les suites récurentes apparaissent largement dans la résolution de quelques problèmes combinatoires. Cet outil est très puissant comme nous allons le voir prochainement en combinatoire.

2.1 Suites arithmético-géometriques

On se place dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque, par exemple $\mathbb{R}$ (corps des réels) ou $\mathbb{C}$ (corps des complexes). Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux éléments a et b de K tels que la suite vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

2.1.1 Terme général

2.1.2 Cas $a = 1$

Pour le cas $a = 1$, on a affaire à une suite arithmétique, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$$

2.1.3 Cas $a \neq 1$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = a\lambda + b$ i.e, $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$. On remarque que

$$u_{n+1} - \lambda = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a(u_n - \lambda)$$

Donc la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \lambda$$

est une suite géometrique, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0$$

On en déduit que

$$u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$$

- On peut toujours ramener l'étude d'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ à celle d'une suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ en posant $v_p = u_{n_0+p}$. La suite (u_n) vérifie une relation de la forme ci-dessus pour tout $n \geqslant n_0$ si et seulement si la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

2.1.4 Somme des premiers termes

Si $a \neq 1$, toujours en posant $\lambda = b/(1–a)$, la somme des n premiers termes (de 0 à n–1) est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = (u_0 - \lambda)\frac{1-a^n}{1-a} + n\lambda$$

- Sous les mêmes hypothèses on peut déduire de n'importe quelle somme de termes consécutifs.

2.2 Récurences linéaires à coéfficients constants

On dit qu'une suite (u_n) à valeurs réelles (ou complexes) d'ordre h à coéfficients constants si

$$\forall n \geqslant h, \qquad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_n u_{n-h} \qquad (a_1, a_2, ..., a_h \in \mathbb{R})$$

La proposition suivante permet de calculer explicitement le terme général d'une telle suite.

2.2.1 Proposition

L'equation

$$x^h - a_1 x^{h-1} - a_2 x^{h-2} - ... - a_h = 0$$

s'appelle l'equation caractéristique de la récurence précédente. Si on note $r_1, r_2, ..., r_q$ ses racines et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ leurs ordres de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant la récurence en question est l'ensemble des suites de la forme

$$u_n = P_1(n) r_1^n + ... + P_q(n) r_q^n$$

avec, pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant q$ le polynôme P_i est de degré $< \alpha_i$

2.2.2 Remarque

- Les suites arithmético-géometrique ne sont qu'un cas particulier des récurences linéaires.

2.2.3 Suites récurentes linéaires d'ordre 2

On rencontre souvent des suites récurentes linéaires d'ordre 2 à coéfficients constants

$$u_0, u_1 \qquad \forall n \geqslant 2, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

L'equation caractéristique correspondante s'écrit

$$x^2 - ax - b = 0, (E)$$

et dans ce cas, la proposition précédente s'annonce comme suit.
- Si (E) possède deux racines distinctes x_1, x_2, les suites vérifiant la relation de récurence sont de la forme

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

Les coéfficients α et β sont détérminés à partir des équations $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$ - Si (E) possède une racine double x, les suites vérifiant la relation de récurence sont celles de la forme

$$u_n = (\alpha n + \beta)x^n$$

On détermine α et β grâce aux équations $u_0 = \alpha$ et $u_1 = (\alpha + \beta)x$.

- Lorsque les racines de (E) sont des complexes, c'est une autre histoire.

2.3 Récurences homographiques

On dit qu'une suite (u_n) (réelle ou complexe) vérifie une récurence *homographique* si elle vérifie une relation de récurence du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = h(u_n) \text{ avec } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0 \qquad (*)$$

Une telle suite est définie pour tout n si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de h. La proposition suivante permet d'exprimer explicitement u_n en fonction de n.

2.3.1 Proposition

Soit (u_n) une suite vérifiant $(*)$. On considère l'équation

$$h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0, (E)$$

- Si (E) admet deux racines distinctes α, β alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_n - \alpha}{a_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$$

- Si (E) admet une racine double α, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \text{ avec} \qquad k = \frac{c}{a - \alpha c}$$