STRATÉGIES DE BASE

Choukri Saâd

Niveau : Débutants

1 PRINCIPE DES TIROIRS

En mathématiques, le principe des tiroirs de Dirichlet, affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs.

Mathématiquement, le principe des tiroirs peut s'énoncer ainsi :
Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$ et si $f : E \to F$ est une application de E dans F, alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f ; autrement dit il n'existe pas d'application injective de E dans F.

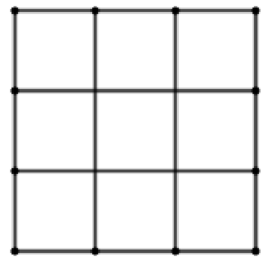
Le principe des affirme que si on place n chaussettes dans m tiroirs et si n n'est pas multiple de m, alors un des m tiroirs contient au moins $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ chaussettes. En effet si les m tiroirs contiennent tous moins que $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ chaussettes alors le nombre total des chaussettes n sera inferieur à $m \times \lfloor \frac{n}{m} \rfloor < n$. En particulier si on place $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir contenant 2 chaussettes.

Exemple 1. Un être humain possède entre 0 et 500001 cheveux. Montrer qu'il y a deux Casablancais qui ont le même nombre de cheuveux.

Il y'a un nombre de casablancais supérieur à 500001, parmi 500001 Casablancais (les chaussettes), il y'a 2 qui ont le même nombre de cheuveux.

Exemple 2. Montrez que pour tout ensemble de 10 points choisis à l'interieur d'un carré de coté 3, il existe 2 points dans la longueur du segment dont les extremités ces 2 points est au plus égale à $\sqrt{2}$.

Divisons notre carré en 9 carreaux chacun de coté de longueur 1 (Voir la figure ci dessous)



Les 10 points sont placés dans 10 carreaux, donc d'aprés le principe des tiroirs il existe un carreau qui contient 2 points. A l'interieur d'un carré de coté de longueur 1, la distance maximale entre deux points est $\sqrt{2}$, ce qui achéve la demonstration.

Exemple 3. On colorie tout les points du plan en rouge et vert. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur distants de 1 mètre exactement.

On dessine un triangle équilateral de coté de longueur 1. Les trois sommets du triangle sont coloriés soit en rouge soit en vert, donc il existe deux sommets de même couleur, la distance entre ces deux points est exactement 1.

- Exercices -

Exercice 1(Morocco MO 2017). Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, i, j)$. On considére cinq points, les coordonnées de chacun d'eux sont des entiers naturels
Montrez que, parmi ces cinq points, il existe au moins deux points qui forment un segment dont les coordonnées de son milieu, sont aussi des entiers naturels.

Exercice 2(Morocco MO 2006). On place 65 boules de couleurs et de tailles différentes dans deux urnes. Chaque boule est soit blanche soit rouge soit jaune et on suppose que chaque fois qu'on choisit 5 boules de même couleur il existe deux parmi ces boules, qui ont la même taille.
Montrez qu'il existe au moins 3 boules prises du même urne de même couleur et de même taille.

Exercice 3. (i) Montrer que quel que soit $n \geqslant 2$, parmi $(n + 1)$ entiers quelconques $a_0, a_1 ... a_n$, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible

par n.
(ii) Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 4. Montrez que parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent toutes entre elles ou trois qui ne se connaissent pas entre elles.

Exercice 5. Soient onze nombres choisis dans l'ensemble $\{1, ..., 20\}$. Montrer que l'on peut choisir deux nombres parmi les onze tels que la différence des deux vaut cinq.

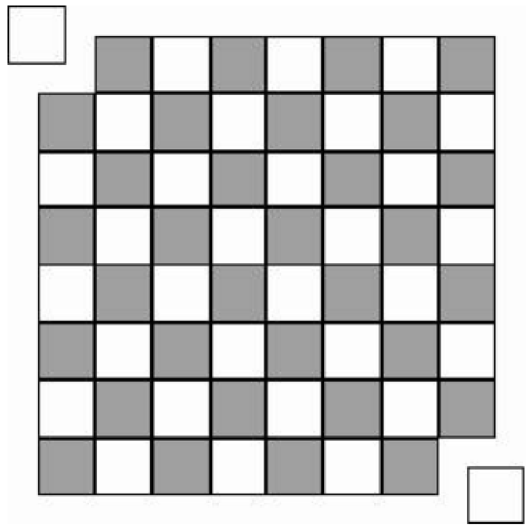
2 Principe d'invariance

Lorsque on est face à un probléme qui met en jeu un algorithme, c'est à dire la répétition de certaines transformations, on essaye de trouver une grandeur qui se conserve.
Le fait de savoir que quelque chose ne change pas nous donne des propriétés sur l'état final du probléme. Pour bien comprendre ce principe, il faut, comme souvent en mathématiques olympiques, voir plusieurs exemples.

Exemple 1. On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé la case en haut à gauche. Peut-on le paver avec des dominos ?

La réponse est non. Nous allons démontrer cela à l'aide du principe d'invariance. Un domino recouvre exactement deux cases de l'échiquier. Par conséquent, à chaque fois que nous posons un domino, la parité du nombre de case qu'il reste à paver ne change pas car si n *est un entier,* n *et* $n-2$ *ont même parité. Or notre échiquier a 63 cases au début. Donc après chaque étape, il restera un nombre impair de case à recouvrir. A la fin du processus, il restera un nombre impair de case à recouvrir et comme 0 est pair, nous n'arriverons jamais à tout recouvrir.*

Exemple 2. On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé les deux coins opposés comme le montre la figure ci-dessous. Peut-on paver cet échiquier avec des dominos ?



Dans ce cas, si on prend le même invariant que tout à l'heure, nous obtenons qu'à la fin, il est possible qu'il reste 0 case puisqu'on commence avec 62 cases. Toutefois, il ne faut surtout pas se dire que, parce que cet invariant est bon, nous pouvons créer un pavage qui répond à la question ! Nous allons même montrer qu'on ne peut pas paver cette figure. Cette fois, la démonstration est un peu plus subtile et l'invariant que l'on va considérer va passer par le coloriage de notre échiquier en cases blanches et noires. Vous remarquez que nous avons enlevé 2 cases blanches. Donc il nous reste 30 cases blanches et 32 cases noires. On remarque également que lorsqu'on pose un domino, il couvre nécessairement une case blanche et une case noire. Donc, si on appelle b *le nombre de cases blanches et n le nombre de cases noires, 'a chaque étape,* $b - n$ *est conservé. C'est notre invariant. Comme au début* $b - n = 2$*, on obtient à la fin de notre pavage le même résultat. Donc il va forcément rester au moins 2 cases blanches qui ne seront pas recouvertes.*

- Exercices -

Exercice 6. Vingt deux arbres sont disposés en rond. Sur chaque arbre se pose un corbeau. A chaque minute, deux corbeaux s'envolent de leurs arbres et se posent sur arbre voisin. Est-il possible qu'aprés un certain temps tous les corbeaux soient sur le même arbre ?

Exercice 7. On considère un triplet de nombres réels (a, b, c). On peut effectuer l'action suivante : on choisit x et y deux des nombres du triplet et on les remplaces par $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ au triplet final $(2, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$?

Exercice 8. Soit n un entier naturel. Les nombres $1, 2, 3, ..., 4n$ sont écrits sur un tableau. On en choisit alor de manière répétée deux nombres arbitraires a et b, on les effaces et on écrit à leurs places $\mid a - b \mid$. Montrez que le dernier nombre restant est toujours pair.

Exercice 9. Soient a, b, c des nombres entiers non tous identiques. Lors de chaque opération, on remplace le triple (a, b, c) par le triple $(a-b, b-c, c-a)$. Montrer que les trois coordonnées ne peuvent pas toutes rester bornées à la fois.

3 PRINCIPE DE LA VALEUR MOYENNE

Le principe de la valeur moyenne affirme que la moyenne arithmetique de n réels est supérieur à l'un de ces réels est inférieur à un autre. Malgré que ce principe peut sembler évident mais il est trés util en mathématiques olympiques.

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ *des nombres réels et*

$$M = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

alors au moins, un des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ *est plus grand ou égal* M *et un au moins de ces nombres est plus petit ou égal à* M*.*

Exemple 1. Supposons que les 10 nombres distincts de $\{1, 2, ..., 10\}$ sont sont rangés de façon arbitraire sur un cercle.
1. Montrez qu'il existe trois nombres successifs sur le cercle dont la somme $\geqslant 17$.
2. La même question avec la somme $\geqslant 18$.
1. Notons $a_1, a_2, ..., a_n$ *les dix nombres sur le cercle. On a*

$$M = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + ... + (a_{10} + a_1 + a_2)}{10}$$

la moyenne des réels $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})_{1 \leqslant i \leqslant 10}$*. D'autre part*

$$M = \frac{3\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} = \frac{3\sum_{i=1}^{10} i}{10} = 16,5$$

Donc l'un des réels $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})_{1 \leqslant i \leqslant 10}$ *est supérieur à 16,5, donc supérieur à 17.*
2. On suppose que $a_1 = 1$, *on a*

$$M' = \frac{(a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10})}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{10} i - 1}{3} = 18$$

D'ou le résultat.

- Exercices -

Exercice 10. Supposons qu'il y a $n \geqslant 4$ points distincts dans le plan, et que chaque paire d'entre eux est liée par un segment. Si parmi toutes les longeurs de ces segments, seules $n+1$ longueurs sont égales à d, montrer qu'il existe un point P tel qu'il y a au moins 3 segments se coupant en P dont les longueurs sont toutes égales à d.

Exercice 11. Dans un plan, on donne quatre points tels que trois quelconques parmi ces quatre points ne sont pas alignés. Montrez qu'il existe au moins un triangle admettant trois de ces points comme sommets, et dont l'un des angles n'est pas aigu.

4 Principe d'inclusion-exclusion

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se généralise en termes de probabilités.

Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré, formule de Poincaré, ou formule du crible.

Pour un ensemble E *fini, on désigne par* $\mathrm{Card}(E)$ *le nombre des élements de l'ensemble* E.
Soit E *un ensemble de cardinal fini, et soient A et B deux parties de E, alors on a*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

Exemple 1(Morocco MO, 2013). Une classe comporte 23 élèves dont 10 filles.

Chaque élève doit choisir d'apprendre une seule langue élrangère, à savoir l'allemand et ke français. Parmi ces 23 élèves, 11 ont choisis le français comme langue étrangère+ Le nombre de filles qui ont choisit le français plus le nombre de garçons qui ont choisit l'allemand, est égal à 16.
Quel est le nombre de filles qui ont choisit le français ?

On considére les ensembles :
A : l'ensemble des garçons qui ont choisit d'étudier le français.
B :l'ensemble des garçons qui ont choisit d'étudier l'allemand.
C : l'ensemble des filles qui ont choisit d'étudier le français.
D : l'ensemble des filles qui ont choisit d'étudier l'allemand.

Il s'agit de calculer $\mid C \mid$, *on a :*

$$\begin{cases} \mid C \mid + \mid D \mid = 10 \\ \mid A \mid + \mid B \mid = 13 \\ \mid A \mid + \mid C \mid = 11 \\ \mid B \mid + \mid C \mid = 16 \end{cases} \tag{1}$$

Sachant que $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$, *donc*

$$2 \mid C \mid + \mid A \mid + \mid B \mid = 16 + 11$$

On en déduit :

$$\mid C \mid = 7$$

Soient $A_1, ..., A_n$ n ensembles finis. Nous avons

$$\mid \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid = \sum_{i=1}^{n} \mid A_i \mid - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mid A_i \cap A_j \mid + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mid A_i \cap A_j \cap A_k \mid - ... + (-1)^{n-1} \mid \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid$$

Finalement, on donne une autre version du principe d'inclusion exclusion qui consiste à faire un passage complémentaire dans la formule précédente :

Soit S un ensemble fini, et soient $A_1, ..., A_n$ n *parties de S. On désigne par* $\overline{A}$ *le complémentaire de A dans S, on a*

$$\mid \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \mid = \mid S \mid - \sum_{i=1}^{n} \mid A_i \mid + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mid A_i \cap A_j \mid - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mid A_i \cap A_j \cap A_k \mid + ... + (-1)^{n} \mid \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid$$

Exemple 2. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs éléments de $\{1, 2, ..., 999\}$ qui ne sont divisibles ni par 7 ni par 5.

Soient $S = \{1, 2, ..., 999\}$ *et* $A_i = \{k : k \in S, k \text{ est divisible par } i\}$ *avec i=5,7. Il s'agit de calculer* $|\overline{A_5} \cap \overline{A_7}|$*. D'après le principe d'inclusion-exclusion avec complémentaire on sait que :*

$$|\overline{A_5} \cap \overline{A_7}| = |S| - |A_5| - |A_7| + |A_5 \cap A_7| = 686$$

- Exercices -

Exercice 12. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Exercice 13. Les n stagiaires au stage d'Avril vont se baigner et laissent leurs t-shirts en vrac sur le sable. Ils reviennent et prennent un t-shirt complètement au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne se retrouve avec son t-shirt ?

Exercice 14. De combien de façons peut-on faire asseoir n couples mariés sur une line de sorte qu'aucun homme n'est à côté de sa femme.

5 Principe de l'extremum

L'expression « élément extremum » signifie « élément maximum » ou « élément minimum ».

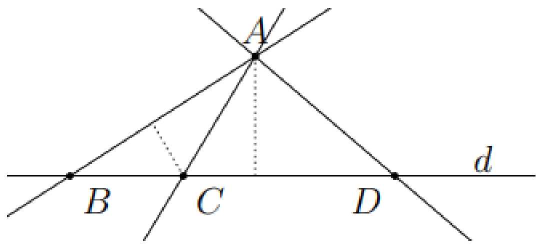
Dans un ensemble ordonné E, un élément d'une partie A est le plus grand élément ou maximum de A, s'il appartient à A et est supérieur à tout autre élément de A. L'existence d'un maximum n'est en général pas assurée pour toute partie d'un ensemble ordonné. En revanche, sous condition d'existence, un tel élément est unique (ce qui justifie l'emploi de l'article défini « le » dans la définition). De manière analogue, le plus petit élément ou minimum est, s'il existe, un élément de A inférieur à tout autre élément de A.

Le principe de l'extremum est une heuristique qui consiste à considérer un objet pour lequel une certaine quantité associée est minimale ou maximale.

Exemple 1. On se donne n points du plan. On suppose que pour deux points quelconques distincts, il en existe un troisième aligné avec les deux premiers.

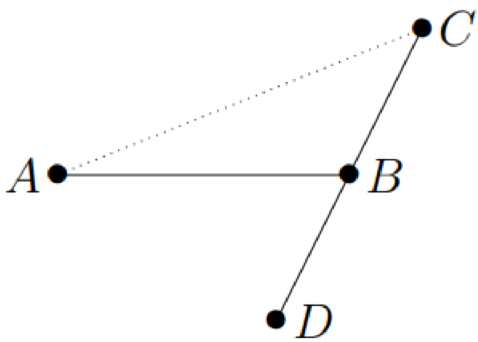
Montrer que tous les points sont alignés.

Pour chaque paire de points distincts, traçons la droite passant par ces deux points. Supposons par l'absurde que tous les points ne sont pas alignés. Autrement dit, tous les points ne sont pas sur une même droite. Il existe donc des distances entre les points et les droites qui sont strictement positives. Considérons donc le point et la droite qui ont la plus petite distance strictement positive. Appelons A *ce point et* d *la droite. Par* d*, il passe par hypothèse au minimum trois points* B, C *et* D*, qu'on place comme sur la figure.*



Exemple 2. On se donne des points dans le plan tels que chaque point soit le milieu de deux autres. Montrer que les points sont en nombre infini.

On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de points. On considère un couple de points (A, B) tel que la distance AB soit maximale. B est par hypothèse le milieu de deux points qu'on nommera C et D. On a alors AC > AB ou AD > AB, ce qui contredit la maximalité de AB. Conclusion, les points sont bien en nombre infini.



- Exercices -

Exercice 15. On affecte une valeur entière positive ou nulle à chaque point à coordonnées entières du plan de sorte que chaque valeur soit la moyenne de ses quatre voisines. Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 16. On considère un ensemble fini de droites parmi lesquelles il n'existe pas deux droites parallèles. On suppose également qu'en tout point d'intersection passe au moins trois droites. Montrer que toutes les droites se croisent en un même point.

Exercice 17. On se donne n points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle de surface inférieure ou égale à 1. Montrer que les n points sont tous dans un triangle de surface $\leqslant 4$.

- Solutions des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1.*</u> On raisonne sur les abscisses des 5 points, parmi ces 5 points, 3 points dont les abscisses ont la même parité ; parmi ces trois points il existe 2 points dont les ordonnées ont la même parité. Le milieu du segment dont les extrémités ces deux points est à coordonnées entieres.

<u>*Solution de l'exercice 2.*</u> Puisque 65 boules sont placés dans deux urnes différentes, il existe donc une urne qui contient 33 boules ; ces boules sont coloriées par quatre couleurs différentes d'après le principe des tiroirs, il existe 9 boules qui sont coloriées par la même couleur, supposons qu'il sont coloriés en blanc. Soient $b_1, b_2, ..., b_9$ ces 9 boules, on pose $B = \{b_1, b_2, ..., b_9\}$; dans l'ensemble $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, par hypothése il existe deux élements b_1 et b_2 (sans perte de généralité) qui on la même couleur, ont montre de même que b_3 et b_4 ont la même couleur en considérant l'ensemble $B_2 = \{b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$, et aussi que b_5 et b_6 ont la même couleur en considérant l'ensemble $B_3 = \{b_5, b_6, b_7, b_8, b_9\}$.
Dans l'ensemble $\{b_1, b_3, b_5, b_7, b_8\}$, il existe deux élements qui ont la même couleur, si par exemple b_1 et b_7 ont la même couleur, c'est fini. Sinon on a forcément b_7 et b_8 ont la même couleur. De même on montre que b_7 et b_9 ont la même couleur en considérant l'ensemble $\{b_1, b_3, b_5, b_7, b_9\}$. Finalement les boules b_7, b_8 et b_9 ont la même couleur.

<u>*Solution de l'exercice 3.*</u> (i) Soit $n \geqslant 2$ un entier, et soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des entiers. On raisonne que les restes modulo n. On sait que d'aprés le théorème de la division euclidienne que le reste modulo n est compris entre 0 et $n-1$, il y'a alors n valeurs prises par le reste modulo n. Donc parmi les $n+1$ restes modulo n des entiers $a_1, ..., a_n$, il existe deux restes r_i et r_j identiques, d'ou n divise $a_i - b_j$.
(ii) On choisit la suite des entiers $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ comme suit $a_i = \underbrace{11...1}_{i}$, d'aprés ce qui précede il existe deux termes a_i et a_j tel que n divise $a_i - a_j$. Finalement on remarque que les chiffres de $a_i - a_j$ sont les 0 et les 1.

<u>*Solution de l'exercice 4.*</u> On commence par considérer une de ces personnes et on essaie de déduire quelque chose sur les personnes qu'elle connait ou non. Il y a deux tiroirs, "connait" ou "ne connait pas", et cinq objets qui sont les cinq liens de la personne selectionnée avec les cinq autres personnes. Ainsi, une personne donnée connait au moins trois personnes ou ne connait pas au moins

trois personnes. Sans perte de généralité, on suppose que la personne sélectionnée connait trois autres personnes. Si deux de ces trois personnes se connaissent alors on a fini en prenant ces deux personnes avec la première. Autrement ces trois personnes ne se connaissent pas entre elles et donc on a aussi terminé. Pour un exercice de ce genre, il est plus commode de représenter les personnes par six points sur une feuille et les liens "connait" et "ne connait pas" en reliant les différents points par des segments de deux couleurs. On veut ainsi montrer que, peu importe les couleurs que l'on donne aux quinze segments, il y a toujours un triangle dont tous les côtés ont la même couleur.

Solution de l'exercice 5. On construit les cinq tiroirs suivants : $\{1, 6, 11, 16\}$; $\{2, 7, 12, 17\}$ $\{3, 8, 13, 18\}$; $\{4, 9, 14, 19\}$; $\{5, 10, 15, 20\}$. Par le principe des tiroirs, on va choisir au moins trois nombres dans le même tiroir (noter que les tiroirs sont disjoints). On peut ensuite facilement se convaincre qu'en choisissant trois nombres dans le même tiroir, il y en aura deux dont la différence fera cinq.

Solution de l'exercice 6. Supposons que les arbres sont alternés entre des cerisiers et des pommiers. On va compter le nombre de corbeaux posés sur des cerisiers. Au début il y a 11 corbeaux sur des cerisiers, et à la fin soit 0, soit 22 selon l'espece de l'arbre sur lequel tous les corbeaux sont posés. Mais à chaque étape on peut vérifier que le nombre des corbeaux sur des cerisiers reste le même, augmente de 2 ou diminue de 2. En particulier il ne change pas de parité. On ne peut donc pas passer de 11 à 22 ou 0.

Solution de l'exercice 7. On commence par remarquer qu'aprés chaque opération, la somme des carrées des termes des triplets reste constante. Il suffit maintenant de vérifier que la somme des carrés du triplet initial n'est pas la même que celle du triplet final.

Solution de l'exercice 8. On cherche une grandeur qui ne change pas lors de l'opération. Le seul changement est qu'on efface les nombres choisis a et b et qu'on les remplaces par $\mid a - b \mid$. Tous les autres nombres restent inchangés sur le tableau. On peut supposer que $a \geqslant b$. On a alors $\mid a-b \mid = a-b$ et l'opération peut s'écrire comme $a, b \to a-b$. En particulier la somme des nombres sur le tableau diminue de $-2b$, donc d'un nombre pair. Par conséquent, la somme modulo 2 est un invariant. Au début, elle vaut $1 + 2 + ... + 4n = 2n(4n + 1) = 0(mod 2)$. A la fin, elle est tout simplement le dernier nombre restant. Ainsi celui-ci est pair, ce qui confirme l'hypothèse de départ.

<u>*Solution de l'exercice 9.*</u> Soit (a_n, b_n, c_n) le triplet après la n-ième étape. Très clairement on a $a_n + b_n + c_n = 0$ si $n \geqslant 1$, mais cela n'aide pas directement. L'idée est de considérer (a_n, b_n, c_n) en tant que point dans l'espace tridimensionnel. Alors la distance à l'origine, ou plus simplement son carré An peut être une grandeur à considérer. On sait que

$$A_{n+1} = \sum a_{n+1}^2 = \sum (b_n - c_n)^2 = 2\sum a_n^2 - 2\sum a_n b_n = 3\sum a_n^2 = 3A_n$$

Donc

$$A_{n+1} = 3^n A_1 > 0$$

Alors la suite (A_n) n'est pas majorée, par conséquent l'une des suites (a_n), (b_n), (c_n) n'est pas bornée.

<u>*Solution de l'exercice 10.*</u> Pour tout point P_i, on note n_i le nombre de segments de longueur d dont l'extrémité est le point P_i. On a

$$\frac{\sum n_i}{n} = \frac{2(n+1)}{n} > 2$$

Donc il existe un indice i tel que $n_i \geqslant 3$, ce qui achéve la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 11.*</u> On se donne quatre points A, B, C, D.
Deux cas se présentent :
- soit l'un des points est à l'interieur du triangle formé par les trois autres ; par exemple , D intérieur à ABC. Alors $\widehat{ADC} + \widehat{CBD} + \widehat{BDA} = 2\pi$, donc l'un de ces trois angles est supérieur ou égal à $\dfrac{2\pi}{3}$ par le principe de la valeur moyenne, d'ou la conclusion ;
- soit les points forment un quadrilatère convexe. Dans ce quadrilatère, la somme des angles au sommets est égale à 2π. Donc par le principe de la valeur moyenne l'un des ces angles $\geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 12.*</u> Soient $S = \{1, 2, ..., 120\}$ et $A_i = \{k/k \in S, i \text{ divise } k\}$ avec $i = 3, 5, 7$. Il s'agit de calculer $\mid \bar{A_3} \cap \bar{A_5} \cap \bar{A_7} \mid$.

$$\mid \bar{A_3} \cap \bar{A_5} \cap \bar{A_7} \mid = \mid S \mid - \sum \mid A_i \mid + \sum \mid A_i \cap A_j \mid - \mid A_3 \cap A_5 \cap A_7 \mid = ...$$